重心座標

陳信睿

2021 年 9 月 4 日

目錄

1　從向量看重心座標

定義 1. 若 ABC 爲平面上一個非退化的三角形，則定義點 P 關於 $\triangle ABC$ 的重心座標爲

$$P=\left[\frac{[\triangle PBC]}{[\triangle ABC]},\frac{[\triangle PCA]}{[\triangle BCA]},\frac{[\triangle PAB]}{[\triangle CAB]}\right],$$

並稱 $\triangle ABC$ 爲座標三角形。

在**定義 1**中的 $[X]$ 表示多邊形 X 的有向面積。在後面的討論，若沒有特別說明，我們都默認非退化的 $\triangle ABC$ 爲座標三角形，且 $|BC|=a,|CA|=b,|AB|=c$。

由於重心座標有三個分量描述平面上的點，所以照上面的定義方式，只要決定了兩個分量，就可以唯一決定剩下的那個分量。因此我們可以擴充定義，使其成爲齊次座標，即定義 $[x:y:z]$ 與 $[x/(x+y+z),y/(x+y+z),z/(x+y+z)]$ 爲同一個點 (當 $x+y+z\neq 0$)，也就是一個點的重心座標的三個分量和可以不必是1。若某個座標的三個分量和爲1，則稱此座標爲標準的，而將座標變爲標準的過程稱爲標準化。若要強調某座標已被標準化，則以 $[-,-,-]$ 表示，而未標準化的座標以 $[-:-:-]$ 表示。下面，我們將刻劃一些關於重心座標與歐氏平面上向量的關係。

定理 2. *若某點 P 的座標爲 $[x,y,z]$ ，則 $x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\vec{0}$。*

證明. 設 A,B,C 分別對 P 位似 x,y,z 倍的像爲 A',B',C'，則可以知道 $[\triangle PB'C']:[\triangle PC'A']:[\triangle PA'B']=1:1:1$，即知 P 爲 $\triangle A'B'C'$ 的重心，因此有 $\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}=\vec{0}$，即有

$$x\overrightarrow{PA}+y\overrightarrow{PB}+z\overrightarrow{PC}=\vec{0},$$

故得證。 □

以下結果爲**定理 2**的一個立即的推論。

推論. 若點 P 的座標爲 $[x:y:z]$，O 爲歐氏平面上任意點，則

$$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=(x+y+z)\overrightarrow{OP}。$$

定理 3. *若 $O,P\notin\mathcal{L}_\infty$ 是平面上兩點，則存在唯一一組 (x,y,z)，使得*

$$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP},$$

且滿足 $x+y+z=1$。換句話說，若點 P 滿足

$$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP}\quad 且\quad x+y+z=1,$$

則 P 的座標爲 $[x,y,z]$。

證明. 由**推論 1**可以知道，當 P 點 (標準化) 的座標爲 $[x,y,z]$ 時，

$$x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OP},$$

我們現在要證明，不存在一組 $(x',y',z') \neq (x,y,z)$ 滿足敘述中的兩個條件。反設這樣的序對存在，我們可以寫下

$$\begin{aligned} x' \overrightarrow{OA} + y' \overrightarrow{OB} + z' \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OP} \\ \Longrightarrow (x'-x) \overrightarrow{OA} + (y'-y) \overrightarrow{OB} + (z'-z) \overrightarrow{OC} &= \vec{0} \end{aligned}$$

令 $(x'-x)=u,(y'-y)=v,(z'-z)=w$，由假設知道 $u+v+w=0$ 且 u,v,w 不全爲 0。若 $w=0$，則易得 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}$，不合。因此，我們可以假設 $uvw \neq 0$，我們可以將上面的式子改寫成

$$\begin{aligned} u \overrightarrow{OA} + v \overrightarrow{OB} &= (u+v) \overrightarrow{OC} \\ \Longrightarrow \frac{u}{u+v} \overrightarrow{OA} + \frac{v}{u+v} \overrightarrow{OB} &= \overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

由分點公式知道 $C \in AB$，不合，故知不存在一組 $(x',y',z') \neq (x,y,z)$ 滿足敘述中的兩個條件。 □

在證明完**定理 3**後，我們可以引入直線在重心座標上的方程式。

定理 4 (直線方程式). *直線 L 在重心座標上面的方程式有 $ux+vy+wz=0$ 的形式，意即存在不全爲 0 的三個數 $u,v,w \in \mathbb{R}$，使得*

$$P=[x:y:z] \in L \iff L: ux+vy+wz=0。$$

證明. 設 L 過平面上相異兩點 $U,V \notin \mathcal{L}_\infty$，座標分別爲 $[p_1,q_1,r_1],[p_2,q_2,r_2]$，由**推論 1**可以知道

$$\begin{cases} p_1 \overrightarrow{OA} + q_1 \overrightarrow{OB} + r_1 \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OU} \\ p_2 \overrightarrow{OA} + q_2 \overrightarrow{OB} + r_2 \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OV} \end{cases}$$

由分點公式知道點 $P \in UV$ 若且唯若存在一個實數 λ，使得

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} &= \lambda \overrightarrow{OU} + (1-\lambda)\overrightarrow{OV} \\ &= (\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2)\overrightarrow{OA} + (\lambda q_1 + (1-\lambda)q_2)\overrightarrow{OB} + (\lambda r_1 + (1-\lambda)r_2)\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

此時，由一些簡單的計算及**定理 3**，我們可以知道 P 的重心座標即爲 $[(\lambda p_1+(1-\lambda)p_2):(\lambda q_1+(1-\lambda)q_2):(\lambda r_1+(1-\lambda)r_2)]$，注意到：存在 u,v,w 不全爲 0，滿足 $up_i+vq_i+wr_i=0$，其中 $i=1,2$。理由是因爲我們可以將它視爲一組 u,v,w 的線性方程組，實際操作後可以發現確實存在這樣的 u,v,w。而

$$\begin{aligned} &u(\lambda p_1 + (1-\lambda)p_2) + v(\lambda q_1 + (1-\lambda)q_2) + w(\lambda r_1 + (1-\lambda)r_2) \\ =& \lambda(up_1+vq_1+wr_1) + (1-\lambda)(up_2+vq_2+wr_2) \\ =& 0 \end{aligned}$$

以上即說明：標準化過後的 P 滿足 $ux+vy+wz=0$。而尚未標準化的點亦適用同一條方程式，因爲該方程式是一條齊次的方程式，縮放常數倍仍然是方程式的解。因此，我們完成了證明。 □

定理 5 (無窮遠線). $\mathcal{L}_\infty$ 的方程式爲 $x+y+z=0$。換句話說，$P=[x:y:z]$ 爲無窮遠點若且唯若 $x+y+z=0$。

證明. 首先，從定義上若 $P=[x:y:z]$ 不爲無窮遠點，則 $x+y+z\neq 0$。因此不爲 $\mathcal{L}_\infty$ 的直線方程式必定不會是 $x+y+z=0$。現在，我們需要證明：若 $L_1: u_1x+v_1y+w_1z=0, L_2: u_2x+v_2y+w_2z=0$ 爲平面上相異的平行直線，則方程組

$$\begin{cases} u_1x+v_1y+w_1z=0 \\ u_2x+v_2y+w_2z=0 \end{cases} \tag{1}$$

的非全 0 解 (x,y,z) 滿足 $x+y+z=0$。而 (1) 中的解有以下的形式：

$$(x,y,z)=\left(\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}\cdot k,\ \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix}\cdot k,\ \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}\cdot k\right),$$

其中 k 爲任意非零實數。也就是說，我們其實要證明：

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix}=0。$$

現考慮 $P\in L_1, Q\in L_2$，假設 $\overrightarrow{PQ}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}$，其中 $p+q+r=0$。而這樣的 p,q,r 是存在的，因爲根據**推論 1**知道

$$\overrightarrow{OP}=p_1\overrightarrow{OA}+q_1\overrightarrow{OB}+r_1\overrightarrow{OC} \qquad \overrightarrow{OQ}=p_2\overrightarrow{OA}+q_2\overrightarrow{OB}+r_2\overrightarrow{OC},$$

其中 P,Q 的座標分別爲 $[p_1,q_1,r_1],[p_2,q_2,r_2]$，此時取 $(p,q,r)=(p_2-p_1,q_2-q_1,r_2-r_1)$ 即可。

由於兩線平行，於是我們可以知道對於每個 $X\in L_1$，都存在 $Y\in L_2$，使得 $\overrightarrow{OY}=\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{PQ}$，因此若 X 的座標爲 $[x_1,y_1,z_1]$，則知

$$\overrightarrow{OY}=(x_1+p)\overrightarrow{OA}+(y_1+q)\overrightarrow{OB}+(z_1+r)\overrightarrow{OC},$$

發現 $(x_1+p)+(y_1+q)+(z_1+r)=1$，因此可以使用**定理 3**，推論 $Y=[x_1+p,y_1+q,z_1+r]$。綜合以上，我們有以下結論：當 $[x_1,y_1,z_1]\in L_1$，則有 $[x_1+p,y_1+q,z_1+r]\in L_2$，明顯這件事的反面也是對的。當我們用方程式的角度觀察這件事時，得到

$$u_1x+v_1y+w_1z=0 \iff u_2(x+p)+v_2(y+q)+w_2(z+r)=0, \quad \text{當} x+y+z=1 \text{時}。$$

因爲有 $x+y+z=1$ 的條件，可以寫下

$$\begin{aligned} & u_2(x+p)+v_2(y+q)+w_2(z+r)=0 \\ \Longrightarrow\ & u_2x+v_2y+w_2z=-(u_2p+v_2q+w_2r) \\ \Longrightarrow\ & u_2x+v_2y+w_2z=-(u_2p+v_2q+w_2r)(x+y+z) \\ \Longrightarrow\ & (u_2+t)x+(v_2+t)y+(w_2+t)z=0\text{，其中 } t=u_2p+v_2q+w_2r \end{aligned}$$

我們可以推論：

$$u_1 = u_2 + t \qquad v_1 = v_2 + t \qquad w_1 = w_2 + t$$

利用得到的 $u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2$ 關係式，可得

$$\begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = t(w_2 - v_2) + t(u_2 - w_2) + t(v_2 - u_2) = 0，$$

故我們完成了證明。 □

定理 6 (三線共點). *設 $L_1, L_2, L_3 \neq \mathcal{L}_\infty$ 爲平面上三相異直線，且其方程式分別爲*

$$u_1x + v_1y + w_1z = 0 \qquad u_2x + v_2y + w_2z = 0 \qquad u_3x + v_3y + w_3z = 0，$$

則 L_1, L_2, L_3 共點若且唯若

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0。$$

證明. 三線共點若且唯若三個線性方程式有共同的非全 0 解，亦即

$$\begin{cases} u_1x + v_1y + w_1z = 0 \\ u_2x + v_2y + w_2z = 0 \\ u_3x + v_3y + w_3z = 0 \end{cases}$$

有非全 0 解，這又等價

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0，$$

即完成了證明。 □

現在，我們想要應用歐氏平面上向量內積的性質來幫助我們證明垂直、線段長等公式。以下，若沒特別說明，取 O 爲 $\triangle ABC$ 的外心。

定理 7 (距離公式). *若 $U = [p_1, q_1, r_1], V = [p_2, q_2, r_2]$ 爲平面上已標準化兩點，則*

$$|UV|^2 = -a^2(q_1 - q_2)(r_1 - r_2) - b^2(r_1 - r_2)(p_1 - p_2) - c^2(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)$$

證明. 由**推論 1**可以知道，

$$\begin{cases} \overrightarrow{OU} = p_1\overrightarrow{OA} + q_1\overrightarrow{OB} + r_1\overrightarrow{OC} \\ \overrightarrow{OV} = p_2\overrightarrow{OA} + q_2\overrightarrow{OB} + r_2\overrightarrow{OC} \end{cases},$$

我們可以利用這兩條關係式寫下 $\overrightarrow{UV}$。

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \quad \overrightarrow{UV} &= (p_2-p_1)\overrightarrow{OA}+(q_2-q_1)\overrightarrow{OB}+(r_2-r_1)\overrightarrow{OC}\\ \Longrightarrow \quad |UV|^2 &= \left((p_2-p_1)\overrightarrow{OA}+(q_2-q_1)\overrightarrow{OB}+(r_2-r_1)\overrightarrow{OC}\right)^2\end{aligned}$$

此時，我們先觀察一下兩個性質：

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=R^2,\qquad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=R^2\cos 2A，$$

其中 R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑。注意到，

$$R^2\cos 2A = R^2(1-2\sin^2 A)=R^2-\frac{a^2}{2}，$$

將前面得到的公式使用上面兩個性質展開，

$$\begin{aligned}|UV|^2 = R^2\left((p_2-p_1)+(q_2-q_1)+(r_2-r_1)\right)^2 &- 2\cdot\frac{a^2}{2}(q_2-q_1)(r_2-r_1)\\ &- 2\cdot\frac{b^2}{2}(r_2-r_1)(p_2-p_1)-2\cdot\frac{c^2}{2}(p_2-p_1)(q_2-q_1)\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow\ |UV|^2 = -a^2(q_2-q_1)(r_2-r_1)-b^2(r_2-r_1)(p_2-p_1)-c^2(p_2-p_1)(q_2-q_1)，$$

故得證。 □

事實上，我們可以從證明的過程中發現，當 p,q,r 為任意實數時，

$$\left(p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}\right)^2=(p+q+r)^2R^2-a^2qr-b^2rp-c^2pq$$

而上面情形恰好符合 $p+q+r=0$。由於 $(p_2-p_1,q_2-q_1,r_2-r_1)$ 這種形式的序對，可以大幅幫助我們減少計算量，因此我們定義兩點的位移向量。

定義 8. 若 $U=[p_1,q_1,r_1], V=[p_2,q_2,r_2]\notin\mathcal{L}_\infty$ 為平面上兩點，則我們定義位移向量 (displacement vector)

$$\overrightarrow{UV}:=(p_2-p_1:q_2-q_1:r_2-r_1)。$$

此定義可以有另個觀點，當我們寫下 $\overrightarrow{UV}=(p_2-p_1:q_2-q_1:r_2-r_1)$ 時，其實背後的意思是 $\overrightarrow{UV}=(p_2-p_1)\overrightarrow{OA}+(q_2-q_1)\overrightarrow{OB}+(r_2-r_1)\overrightarrow{OC}$，也就是說，位移向量在本質上其實也是歐氏平面上向量的另一種表示法。雖然此定義暫時還看不到任何用處，而且可能會與歐氏平面上的向量有記號上的混淆，不過在後面，將可以看到它的好用之處。下面，我們先繼續往前看平面上圓在重心座標上的方程式，最後再來看如何使用位移向量來證明垂直以及討論相關的性質。

定理 9 (圓方程式)**.** *設 ω 是平面上非退化的圓，則 ω 可以被表示成*

$$-a^2yz-b^2zx-c^2xy+(ux+vy+wz)(x+y+z)=0$$

的形式，其中 u,v,w 爲待定常數。換句話說，存在 u,v,w，使得

$$P=[x:y:z]\in\omega \iff \omega: -a^2yz-b^2zx-c^2xy+(ux+vy+wz)(x+y+z)=0\text{。}$$

證明. 假設圓 ω 的圓心 X 的座標爲 $[p,q,r]$，半徑爲 k，則根據**定理 7**，可以寫下 $P[x,y,z]\in\omega$ 若且唯若

$$\begin{aligned}&-a^2(y-q)(z-r)-b^2(z-r)(x-p)-c^2(x-p)(y-q)=k^2\\ &\qquad\iff -a^2yz-b^2zx-c^2xy+(b^2r+c^2q)x+(c^2p+a^2r)y+(a^2q+b^2p)z\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad=k^2+a^2qr+b^2rp+c^2pq\text{，}\end{aligned}$$

令 $t=k^2+a^2qr+b^2rp+c^2pq$，且

$$u_0=b^2r+c^2q,\qquad v_0=c^2p+a^2r,\qquad w_0=a^2q+b^2p\text{，}$$

則上面 ω 的方程式可以改寫成

$$-a^2yz-b^2zx-c^2xy+(u_0-t)x+(v_0-t)y+(w_0-t)z=0\text{，}$$

由於 $P[x,y,z]$ 已被標準化，故 $x+y+z=1$，因此可以再改寫成

$$-a^2yz-b^2zx-c^2xy+(ux+vy+wz)(x+y+z)=0\text{，}\tag{2}$$

其中 $u=u_0-t,\quad v=v_0-t,\quad w=w_0-t$，注意到對於所有已被標準化的 $P[x,y,z]$，都會滿足 (2)，但由於該方程式是齊次的，因此對於未被標準化的 $P[sx:sy:sz]$ 也會滿足該方程式，故得證。 □

在有了這個定理後，我們可以快速地推導重心座標上面的圓冪，以及兩圓根軸的方程式。

推論 (圓冪)**.** 假設 ω 是平面上非退化的圓，$P=[d,e,f]\notin\mathcal{L}_\infty$ 爲平面上一點。若 ω 方程式爲

$$-a^2yz-b^2zx-c^2xy+(ux+vy+wz)(x+y+z)=0\text{，}$$

則 P 對 ω 的冪爲

$$-a^2ef-b^2fd-c^2de+(ud+ve+wf)(d+e+f)=0\text{。}$$

證明. 沿用**定理 9**及其證明之變數及標號。注意到，

$$\begin{aligned}|PX|^2-k^2&=-a^2(e-q)(f-r)-b^2(f-r)(d-p)-c^2(d-p)(e-q)-k^2\\&=-a^2ef-b^2fd-c^2de+u_0d+v_0e+w_0f-t\\&=-a^2ef-b^2fd-c^2de+(ud+ve+wf)\\&=-a^2ef-b^2fd-c^2de+(ud+ve+wf)(d+e+f)\text{，}\end{aligned}$$

故得證。 □

接下來，我們更進一步討論兩圓的根軸如何表示。

推論 (根軸). 假設 ω,γ 是平面上兩個非退化的圓，其方程式分別如下：

$$\begin{aligned}\omega &: -a^2yz-b^2zx-c^2xy+(u_1x+v_1y+w_1z)(x+y+z)=0\\ \gamma &: -a^2yz-b^2zx-c^2xy+(u_2x+v_2y+w_2z)(x+y+z)=0\end{aligned},$$

則兩圓的根軸爲 $(u_1-u_2)x+(v_1-v_2)y+(w_1-w_2)z=0$。

證明. 從**推論 1**可以知道，若 $P=[d,e,f]\notin\mathcal{L}_\infty$，則 P 在 ω,γ 根軸上若且唯若

$$\begin{aligned}&-a^2ef-b^2fd-c^2de+(u_1d+v_1e+w_1f)(d+e+f)\\ =&-a^2ef-b^2fd-c^2de+(u_2d+v_2e+w_2f)(d+e+f)\\ \Longleftrightarrow&\ (u_1d+v_1e+w_1f)(d+e+f)=(u_2d+v_2e+w_2f)(d+e+f)\\ \Longleftrightarrow&\ (u_1-u_2)d+(v_1-v_2)e+(w_1-w_2)f=0，\end{aligned}$$

故知滿足 $L:(u_1-u_2)x+(v_1-v_2)y+(w_1-w_2)z=0$ 且已被標準化的點，爲兩圓 ω,γ 根軸上的點，由於 L 的方程式爲齊次的，故滿足該方程式且未被標準化的點亦屬於兩圓的根軸。 □

到此，關於圓的討論也大致告一段落了，接下來，想要利用向量的內積討論垂直的充要條件。在進入到定理之前，先回憶一下位移向量的定義 (**定義 8**)：若 $U=[p_1,q_1,r_1],V=[p_2,q_2,r_2]\notin\mathcal{L}_\infty$ 爲平面上兩點，則稱 $\overrightarrow{UV}=(p_2-p_1:q_2-q_1:r_2-r_1)$ 爲 UV 爲位移向量。

定理 10 (垂直公式 (EFFT)). *設 $P,Q,R,S\notin\mathcal{L}_\infty$ 爲平面上四點。位移向量 $\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{RS}$ 分別爲 $(p_1:q_1:r_1),(p_2:q_2:r_2)$，則 $PQ\perp RS$ 若且唯若*

$$a^2(q_1r_2+r_1q_2)+b^2(r_1p_2+p_1r_2)+c^2(p_1q_2+q_1p_2)=0。$$

此定理正式一點的名稱 (重心座標) 垂直公式，不過常常也會被稱爲 EFFT，是因爲這在 *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*[1] 中，將此公式稱爲 "EFFT(Evan's Favorite Forgotten Trick)"，後來在數奧圈的各種講義皆多用 EFFT 稱此定理。事實上，關於這個定理的證明，我們其實是證明更強一點的敘述，在同一篇講義裡被稱做 "Strong EFFT" 的定理。

定理 11 (強垂直公式 (Strong EFFT)). *設 $P,Q,R,S\notin\mathcal{L}_\infty$ 爲平面上四點。位移向量 $\overrightarrow{PQ}$ 等於 $(p_1:q_1:r_1)$，且平面上的向量 $\overrightarrow{RS}$ 可以被表示成 $p_2\overrightarrow{OA}+q_2\overrightarrow{OB}+r_2\overrightarrow{OC}$ 則 $PQ\perp RS$ 若且唯若*

$$a^2(q_1r_2+r_1q_2)+b^2(r_1p_2+p_1r_2)+c^2(p_1q_2+q_1p_2)=0。$$

我們可以發現**定理 11**足夠充分推論**定理 10**，理由是因爲，當位移向量 $\overrightarrow{RS}=(p_2:q_2:r_2)$ 時，由位移向量的定義 (**定義 8**) 及**定理 2**可以知道平面向量 $\overrightarrow{RS}$ 可以被表示成

$$\overrightarrow{RS}=p_2\overrightarrow{OA}+q_2\overrightarrow{OB}+r_2\overrightarrow{OC}，$$

即滿足了**定理 11**的敘述。因此，我們只需要證明**定理 11**即可。接下來，**定理 11**的證明將在下面給出。

定理 11 的證明. 注意到 $PQ \perp RS$ 若且唯若 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{RS}=0$，這又等價於

$$(p_1\overrightarrow{OA}+q_1\overrightarrow{OB}+r_1\overrightarrow{OC})\cdot(p_2\overrightarrow{OA}+q_2\overrightarrow{OB}+r_2\overrightarrow{OC})=0\text{，}\tag{3}$$

值得注意的是 $\overrightarrow{PQ}$ 爲位移向量，因此 $p_1+q_1+r_1=0$，這在後續的運算上可以幫助我們不少。另外一個值得注意的點是，我們回憶**定理 7**的證明中，可以看到以下公式

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OA}=R^2,\qquad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=R^2-\frac{a^2}{2}\text{，}$$

這在後續的運算上，也可以有所幫助。由這些觀察，可以寫下 (3) 等價

$$\begin{aligned}&(p_1+q_1+r_1)(p_2+q_2+r_2)R^2\\ =&\frac{a^2}{2}(q_1r_2+r_1q_2)+\frac{b^2}{2}(r_1p_2+p_1r_2)+\frac{c^2}{2}(p_1q_2+q_1p_2)\\ \Longleftrightarrow\ & a^2(q_1r_2+r_1q_2)+b^2(r_1p_2+p_1r_2)+c^2(p_1q_2+q_1p_2)=0\text{，}\end{aligned}$$

我們便完成了證明。 □

接下來，我們將利用平面向量可以計算面積的性質來討論任意三點 P,Q,R 所形成的三角形 (甚至是多邊形) 的面積。我們先回憶以下事實：

$$\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}\right|=\left|[\triangle PQR]\right|\text{，}$$

其中 $[\triangle PQR]$ 的定義如同**定義 1**中的定義，即表示 $\triangle PQR$ 的有向面積。而右式多了一個絕對值，則是因爲有向面積帶有正負號，但左式的值只會是正值，不過值得注意的是：若 $\triangle P_1Q_1R_1$ 與 $\triangle P_2Q_2R_2$ 計算出來的

$$\overrightarrow{P_1Q_1}\times\overrightarrow{P_1R_1}\qquad \overrightarrow{P_2Q_2}\times\overrightarrow{P_2R_2}\text{，}$$

若爲相反方向的向量 (他們必平行，因爲他們都是同一個平面的法向量)，則代表 $[\triangle P_1Q_1R_1]$ 與 $[\triangle P_2Q_2R_2]$ 異號。有了這個觀察，我們可以直接宣稱

$$\left|[\triangle P_1Q_1R_1]+[\triangle P_2Q_2R_2]\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{P_1Q_1}\times\overrightarrow{P_1R_1}+\overrightarrow{P_2Q_2}\times\overrightarrow{P_2R_2}\right|$$

是對的，這可以幫助我們的接下來的討論以及證明。

定理 12 (面積公式). *若 $P,Q,R\notin\mathcal{L}_\infty$ 爲平面上三點，座標分別爲*

$$[p_1,q_1,r_1]\qquad [p_2,q_2,r_2]\qquad [p_3,q_3,r_3]$$

則有

$$[\triangle PQR]=[\triangle ABC]\begin{vmatrix}p_1&q_1&r_1\\p_2&q_2&r_2\\p_3&q_3&r_3\end{vmatrix}\text{。}$$

證明. 注意到：$[\triangle PQR]=[\triangle OPQ]+[\triangle OQR]+[\triangle ORP]$ 在有向面積下是正確的，再加上

前面討論的性質，可以寫下：

$$
\begin{aligned}
\left|[\triangle PQR]\right| &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OQ}\times\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OR}\times\overrightarrow{OP}\right| \\
&= \frac{1}{2}\Big|\sum_{i=1}^{3}(p_i\overrightarrow{OA}+q_i\overrightarrow{OB}+r_i\overrightarrow{OC})\times(p_{i+1}\overrightarrow{OA}+q_{i+1}\overrightarrow{OB}+r_{i+1}\overrightarrow{OC})\Big|
\end{aligned}
$$

將此式展開可得

$$
\frac{1}{2}\Big|\sum_{i=1}^{3}(p_iq_{i+1}-q_ip_{i+1})\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+(q_ir_{i+1}-r_iq_{i+1})\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+(r_ip_{i+1}-p_ir_{i+1})\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}\Big|,
$$

觀察後，可以寫下

$$
\begin{aligned}
&\left|[\triangle PQR]\right| \\
&= \left|\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & 1 \\ p_2 & q_2 & 1 \\ p_3 & q_3 & 1 \end{vmatrix}[\triangle OAB]+\begin{vmatrix} 1 & q_1 & r_1 \\ 1 & q_2 & r_2 \\ 1 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}[\triangle OBC]+\begin{vmatrix} p_1 & 1 & r_1 \\ p_2 & 1 & r_2 \\ p_3 & 1 & r_3 \end{vmatrix}[\triangle OCA]\right| \\
&\overset{\spadesuit}{=} \left|\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}[\triangle OAB]+\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}[\triangle OBC]+\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}[\triangle OCA]\right| \\
&= \left\|\begin{matrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{matrix}\right\|\cdot\left|[\triangle OAB]+[\triangle OBC]+[\triangle OCA]\right| \\
&= \left\|\begin{matrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{matrix}\right\|\cdot\left|[\triangle ABC]\right|。
\end{aligned}
$$

$\spadesuit$ 成立，是因為使用了行列式的性質：行、列的運算不改變行列式值。最後可以從證明的過程看出，若 $[\triangle ABC]$ 與 $[\triangle PQR]$ 同號，則

$$
\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}
$$

為正，反之亦然，因此，我們可以寫下

$$
[\triangle PQR]=[\triangle ABC]\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix},
$$

證明結束。 □

推論. 若 $P, Q, R \notin \mathcal{L}_\infty$ 爲平面上三點，其座標分別爲

$$[p_1 : q_1 : r_1] \qquad [p_2 : q_2 : r_2] \qquad [p_3 : q_3 : r_3]，$$

則 P, Q, R 三點共線若且唯若

$$\begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0。$$

證明. P, Q, R 三點共線若且唯若 $[\triangle PQR] = 0$。使用**定理 12**可以知道，$[\triangle PQR] = 0$ 若且唯若

$$\frac{1}{(p_1+q_1+r_1)(p_2+q_2+r_2)(p_3+q_3+r_3)} \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix} = 0，$$

值得注意一下：多出 $1/(p_1+q_1+r_1)(p_2+q_2+r_2)(p_3+q_3+r_3)$ 的修正是因爲定理中12的座標已被標準化但此處的三點未被標準化。不過，也可以發現我們已完成了證明。 □

2 其他

這小節的名字顧名思義，是用來介紹那些前面沒辦法有系統地介紹到，但很有用的性質，內容上可能有些瑣碎，不過都是很重要的工具喔。在下面的討論中可能大量使用到圓錐曲線的性質，我將刻劃一些關於錐線以及重心座標的關係。

定理 13 (圓錐曲線的方程式). *假設 τ 爲一個平面上的圓錐曲線，則 τ 可以被表示成*

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx = 0$$

的形式，其中 A, B, C, D, E, F 爲待定常數。換句話說，存在 A, B, C, D, E, F，使得 $P = [x : y : z] \in \tau \iff \tau : Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx = 0$。

備註. 這個定理的證明大家可以自己嘗試看看，方向大概是找出一個點的重心座標與直角座標的關係式，再從直角座標推到重心座標的方程式，不過寫下來較爲繁瑣，所以這邊就不將證明寫下來。而事實上前面提到的圓方程式以及直線方程式也可以利用這種方式證明。

接下來，我們將討論關於等共軛變換的定義以及其性質。

定義 14 (等共軛變換). 設 $\mathcal{P}$ 爲射影平面上除了直線 AB、直線 BC、直線 CA 所有點形成的集合，則我們稱一個幾何變換 $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ 爲等共軛變換，若存在 $p, q, r \in \mathbb{R}^+$，使得

$$\varphi([x : y : z]) = \left[\frac{p^2}{x} : \frac{q^2}{y} : \frac{r^2}{z}\right]。$$

3 習題

這個章節我會挑出一些很值得拿來熟悉重心座標的題目。

3.1 IMO Shortlist

問題 15. (*19 P2/G3*) *在三角形 ABC 中，點 A_1 落在 BC 上且 B_1 落在 AC 上。設 P,Q 爲線段 AA_1 與線段 BB_1 上兩點，使得 PQ 與 AB 平行。令 P_1 爲一個在直線 PB_1 上的點，同時滿足：B_1 嚴格落在 P 與 P_1 之間，且 $\angle PP_1C = \angle BAC.$。類似的，令 Q_1 爲一個在直線 QA_1 上的點，同時滿足：A_1 嚴格落在 Q 與 Q_1 之間，且 $\angle CQ_1Q = \angle CBA$。*

試證：P,Q,P_1,Q_1 四點共圓。

問題 16. (*19 G4*) *設 P 爲 ABC 內一點。令 AP 交 BC 於 A_1；BP 交 CA 於 B_1；CP 交 AB 於 C_1。令 A_2 爲 P 對 A_1 的對稱點，並用類似方法定義 B_2,C_2。試證 A_2,B_2,C_2 不會都落在三角形 ABC 外接圓內 (嚴格)。*

問題 17. (*18 G2*) *ABC 爲等腰三角形滿足 $AB = AC$，令 M 爲 BC 中點。點 P 爲平面上一點，滿足 $PB < PC$ 且 PA 與 BC 平行。設 X,Y 分別爲落在 PB 與 PC 上的點，使得 B 若在線段 PX 上；C 落在線段 PY 上；且 $\angle PXM = \angle PYM$。試證：A,P,X,Y 四點共圓。*

問題 18. (*17 P4/G2*) *R,S 爲圓 Ω 上相異兩點，使得 RS 不是直徑。設 ℓ 爲 R 在 Ω 上的切線。點 T 爲 R 關於 S 的對稱點。點 J 是 Ω 上劣弧 RS 上一點，使得 JST 的外接圓 Γ 交 ℓ 於兩相異點。令 A 爲 Γ 與 ℓ 更接近 R 的交點。直線 AJ 再次交 Ω 於 K。試證：KT 與 Γ 相切。*

問題 19. (*16 G2*) *設三角形 ABC 的外接圓爲 Γ 且其內心爲 I，並令 M 爲 $\overline{BC}$ 中點。點 D, E, F 分別落在 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ 使得*

$$\overline{ID} \perp \overline{BC} \qquad \overline{IE} \perp \overline{AI} \qquad \overline{IF} \perp \overline{AI}。$$

設 $\triangle AEF$ 的外接圓交 Γ 於 $X \neq A$。試證：直線 XD 與 AM 交在 Γ 上。

問題 20. (*16 G4*) *設三角形 ABC 爲一等腰三角形，滿足 $AB = AC \neq BC$，令 I 爲其內心。設 BI 與 AC 的交點爲 D，且過 D 垂直 AC 的直線交 AI 於 E。試證：I 關於 AC 的對稱點若在三角形 BDE 的外接圓上。*

問題 21. (*15 G4*) *設 ABC 爲一銳角三角形，M 爲邊 AC 的中點。圓 ω 過 B 與 M 分別再交 AB,BC 於 P,Q。設 T 爲平面上一點，使得 $BPTQ$ 爲平行四邊形。假設 T 落在三角形 ABC 的外接圓上。試決定 $\frac{BT}{BM}$ 的所有可能值。*

問題 22. (*15 G5*) *設 ABC 爲平面上的一個三角形滿足 $CA \neq CB$。點 D,F,G 分別爲 AB,AC,BC 的中點。圓 Γ 爲通過 C 且與 AB 相切於 D 的圓，分別交 AF,BG 於 H,I。點 H',I' 分別爲 H,I 關於 F,G 的對稱點。直線 $H'I'$ 分別交 CD,FG 於 Q,M。直線 CM 再交 Γ 於 P。試證：$CQ = QP$。*

問題 23. (*14 G1*) 銳角 ABC 中，點 P,Q 爲邊 BC 上兩點，使得 $\angle PAB = \angle BCA$ 且 $\angle CAQ = \angle ABC$。設 M,N 分別爲 A 對 P,Q 的對稱點。試證：BM 與 CN 交在三角形 ABC 的外接圓上。

問題 24. (*12 G1*) ABC 爲平面上的三角形，點 J 爲 A-旁心。A--旁切圓分別切 BC,AB,AC 於 M,K,L。直線 LM 交 BJ 於 F，直線 KM 交 CJ 於 G。令 S 爲 AF 與 BC 的交點且令 T 爲 AG 與 BC 的交點。試證：M 爲 ST 的中點。

問題 25. (*11 G2*) 設 A_1,A_2,A_3,A_4 四點不共圓。對於 $i=1,2,3,4$，定義 O_i 與 r_i 分別爲三角形 $A_{i+1}A_{i+2}A_{i+3}$ 的圓心與半徑，其中 $A_n = A_{n+4}$。試證：

$$\frac{1}{O_1A_1^2-r_1^2}+\frac{1}{O_2A_2^2-r_2^2}+\frac{1}{O_3A_3^2-r_3^2}+\frac{1}{O_4A_4^2-r_4^2}=0\text{。}$$

問題 26. (*05 G1*) 設三角形 ABC 滿足 $AC+BC=3\cdot AB$。三角形 ABC 的內切圓圓心爲 I 且內切圓分別切 BC,CA 於 D,E。令 K,L 分別爲 D,E 關於 I 的對稱點。試證：A,B,K,L 四點共圓。

問題 27. (*98 P5/G3*) 設 I 爲三角形 ABC 的內心。點 K,L,M 分別爲 ABC 的內切圓在 AB,BC,CA 上的切點。直線 t 過 B 且與 KL 平行。直線 MK 與 ML 分別交 t 於 R,S。試證：$\angle RIS$ 爲銳角。

3.2 APMO

問題 28. (*17 P2*) 設 ABC 爲滿足 $AB<AC$ 的三角形。令 D 爲 $\angle BAC$ 的內角角平分線與三角形 ABC 外接圓的交點。令 Z 爲 AC 中垂線與 $\angle BAC$ 外角角平分線的交點。試證：AB 中點落在三角形 ADZ 的外接圓上。

問題 29. (*16 P3*) 設 AB 與 AC 爲兩射線，滿足 A,B,C 不共線。令 ω 爲一圓，其圓心爲 O，且與射線 AC,AB 相切於 E,F。設 R 爲 EF 上一點。過 O 與 EF 平行的線和直線 AB 交於 P。令點 N 爲直線 PR 與 AC 的交點。過 R 與 AC 平行的線和直線 AB 交於 M。試證：MN 和 ω 相切。

問題 30. (*13 P1*) 設 ABC 爲一銳角三角形，AD,BE,CF 爲三邊上的高，令 O 爲三角形 ABC 的外心。試證：線段 OA,OF,OB,OD,OC,OE 將三角形 ABC 分割成三對等面積的區域。

問題 31. (*13 P5*) 設 $ABCD$ 爲一四邊形內接於 ω，令 P 爲 AC 延長線上一點，滿足 PB 與 PD 爲 ω 的切線。在 C 的切線交 PD 於 Q 且交 AD 於 R。令 E 爲 AQ 與 ω 的第二個交點。試證：B,E,R 三點共線。

問題 32. (*05 P5*) 三角形 ABC 中，點 M,N 分別在 AB 與 AC 上使得 $MB=BC=CN$。令 R 與 r 分別表示三角形 ABC 的外接圓半徑與內切圓半徑。試用 R 與 r 表示比例 MN/BC。

問題 33. (*04 P2*) *設 O 爲銳角三角形 ABC 的外心，H 爲其垂心。試證：三角形 AOH, BOH 與 COH 中有其中兩個的面積和等於第三個。*

3.3 Taiwan TST

問題 34. (*21 2J G2*) *設 ABC 爲平面上的三角形，Γ 爲其外接圓。點 E, F 分別爲邊 CA, AB 上兩點。設三角形 AEF 的外接圓與 Γ 再交於 X。設三角形 ABE 的外接圓與三角形 ACF 的外接圓再交於 K。直線 AK 與 Γ 再交於 $M \neq A$，N 爲 M 關於 BC 的對稱點。設 XN 與 Γ 再交於 $S \neq X$。試證：SM 與 BC 平行。*

問題 35. (*19 2J M2*) *給定三角形 ABC。以 ω, Ω 分別表示其內切圓與外接圓。設 ω 分別與 AB, AC 相切於 F, E。設 EF 與 Ω 交於 P, Q。令 M 爲 BC 中點。取一點 R 在 $\triangle MPQ$ 外接圓上，使得 $MR \perp EF$。試證：AR, ω, Γ 交於一點, 其中 Γ 爲 $\triangle MPQ$ 外接圓。*

問題 36. (*19 2J M6*) *給定 $\triangle ABC$，其內心記爲 I，A-旁心記爲 J。A' 爲 A 關於三角形 ABC 外接圓的對徑點。定義：H_1, H_2 分別爲 $\triangle BIA'$ 與 $\triangle CJA'$ 的垂心。試證：$H_1H_2 \parallel BC$。*

問題 37. (*19 3J M6*) *給定 $\triangle ABC$，Ω 爲其外接圓。記其內心與 A-旁心分別爲 I, J。令 T 爲 J 關於 BC 的對稱點，且 P 爲 BC 與 AT 的交點。若 $\triangle AIP$ 的外接圓交於 BC 於 $X \neq P$，且存在一點 $Y \neq A$ 在 Ω 上使得 $IA = IY$。試證：三角形 IXY 的外接圓與直線 AI 相切。*

問題 38. (*18 3J I2*) *令點 I, G, O 分別爲三角形 ABC 的內心、重心、外心。令點 X, Y, Z 分別爲射線 BC, CA, AB 上的點，使得 $BX = CY = AZ$。令 F 爲三角形 XYZ 的重心。試證：FG 與 IO 垂直。*

參考文獻

[1] Evan Chen. *Barycentric Coordinates in Olympiad Geometry*. 2012. URL: `https://web.evanchen.cc/handouts/bary/bary-full.pdf`.