無處可微的連續函數

陳信睿　　俞采伶　　黃悅媗

指導教授：程守慶教授

2021 年 8 月 12 日

目錄

1　前言

我們主要想要探討的問題是：考慮任何一個連續函數，那麼它會處處可微嗎？或是不可微的點會很多嗎？直覺上來説，我們很容易會想要去證明給定任何一個連續函數，不可微的點是可數的，但事實上，數學家們證明了存在無處可微的連續函數，甚至這樣的函數在連續函數的空間上會形成一個稠密的 G_δ 集。

在本文我們將分兩部分討論這類連續卻無處可微函數的性質。第一部分先構造一個連續卻無處可微的函數，第二部分則是證明這種函數會在函數空間上形成一個稠密的 G_δ 集。

在開始之前，我們要先定義連續性以及均勻連續的概念。

定義 1. $(X,d_X),(Y,d_Y)$ 是兩個度量空間，$f:X\to Y$ 是兩空間的一個函數。若對於所有的 $\epsilon>0$，存在 $\delta=\delta(\epsilon)>0$，滿足對於所有的 $0<d_X(x,p)<\delta,\ x\in X$：

$$d_Y(f(x),q)<\epsilon，$$

則稱當 $x\to p$ 時，$f(x)\to q$，並記爲

$$\lim_{x\to p} f(x)=q。$$

定義 2. 我們稱 f 在點 p 連續，若

$$\lim_{x\to p} f(x)=f(p)。$$

而若一個函數在定義域裡每個點都連續，則稱此函數爲連續函數。

定義 3. 設 $(X,d_X),(Y,d_Y)$ 爲兩個度量空間，$f:X\to Y$ 爲兩空間中的一個函數，則我們稱 f 是一個均勻連續函數，若對於所有的 $\epsilon>0$，都存在 $\delta=\delta(\epsilon)>0$，使得對於任意的 $x,y\in X$，$d_X(x,y)<\delta$，都滿足

$$d_Y(f(x),f(y))<\epsilon。$$

接下來，我們將可以開始討論無處可微的連續函數的存在性問題。

2　函數的存在性

定理 4. *存在一個 $\mathbb{R}$ 上的實函數 f，連續但無處可微。*

在定義此函數之前，我們先引入一些引理，讓我們在證明此函數是連續的且無處可微時可以稍微方便一點。

定理 5 (魏爾施特拉斯判別法). 設 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *爲定義在 E 上的實函數序列，令*

$$M_n=\sup_{x\in E}|f_n(x)|，且M_n<\infty(即M_n\in\mathbb{R})$$

對所有 $x\in E,n\in\mathbb{N}$ 都成立。若 $\sum M_n$ 收斂，則級數 $\sum f_n$ 均勻收斂。

證明. 設 $\sum M_n$ 收斂，將此級數視爲一數列，則有此數列爲一實數上的柯西數列 (收斂數列必爲柯西數列)，表示對於任意的 $\epsilon > 0$，存在 $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$，使得對所有 $j,k \geq n_0$(不失一般性，我們假設 $j \leq k$)，都滿足：

$$\left|\sum_{n=j}^{k} M_n\right| = \left|\sum_{n=1}^{k} M_n - \sum_{n=1}^{j} M_n\right| < \epsilon,$$

又注意到：

$$\left|\sum_{n=1}^{k} f_n(x) - \sum_{n=1}^{j} f_n(x)\right| = \left|\sum_{n=j}^{k} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=j}^{k} M_n,$$

故知實函數級數形成的序列 $\sum f_n$ 滿足柯西序列判別準則 (Cauchy criterion)，因此可以知道此序列均勻收斂。 □

接下來，我們介紹的定理可以幫助我們討論在一個均勻收斂的實函數序列下面，其收斂到的函數可以保持其連續性 (若該實函數序列皆爲連續函數)。

定理 6. *假設 (X, d_X) 爲度量空間，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲一些自 X 至 $\mathbb{R}$ 的函數列，若 f_n 均勻收斂至 f，假設 $x \in X$，且*

$$\lim_{t \to x} f_n(t) = A_n,$$

則 $\{A_n\}$ 收斂，且

$$\lim_{t \to x} f(t) = \lim_{n \to \infty} A_n。$$

證明. 因爲 f_n 均勻收斂，所以對於所有的 ϵ，都存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得 $|f_j(t) - f_k(t)| < \epsilon$，對所有 $j,k \geq n_0$ 及 $x \in X$ 成立。此時，使 $t \to x$，我們會有 $|A_j - A_k| \leq \epsilon$，即 $\{A_n\}$ 爲柯西數列，由實數的完備性知此數列收斂，不妨假設此數列收斂到 A。注意到，

$$|f(t) - A| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|,$$

由於 $\{f_n\}$ 且有 $A_n \to A$，因此存在 $n_1 \in \mathbb{N}$，同時滿足：

$$|f_n(t) - f(t)| < \epsilon/3，若 n \geq n_1, t \in X,$$

以及

$$|A_n - A| < \epsilon/3，若 n \geq n_1。$$

對於這個 n_1，我們可以適當的選擇一個 x 的開鄰域 V，使得

$$|f_n(t) - A_n| < \epsilon/3，若 n \geq n_1, t \in V。$$

綜合以上，我們可以知道存在 x 的開鄰域 V，使得

$$|f(t) - A| < \epsilon，若 t \in V,$$

此即爲

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} A_n。$$

故定理得證。 $\square$

推論. 假設 (X, d_X) 爲度量空間，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 爲一些自 X 至 $\mathbb{R}$ 的函數列，若 f_n 均勻收斂至 f，且 f_n 皆連續，則 f 連續。

成立的理由是：因爲 f_n 的連續性，可以知道當 $t \to x$ 時 $f_n(t) \to f_n(x)$，即 $A_n = f_n(x)$，而**定理 6**告訴我們：

$$\lim_{t\to x} f(t) = \lim_{n\to\infty} A_n = f(x)，$$

即與連續的定義等價。

現在有了以上的定理，我們便可以回到**定理 4**的證明。

定理 4 的證明. 定義函數 $\varphi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ 如下

$$\varphi(x) = |x| \quad (-1 \le x \le 1)，$$

並將 $\varphi(x)$ 擴充成爲一個週期爲 2 的函數 (即 $\varphi(x) = \varphi(x+2)$)，如此，我們讓 φ 擴充到整個實數系上。接著，我們可以得到：

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| \le |s - t|, \ \forall s, t \in \mathbb{R}。$$

根據 $\varphi(x)$ 的定義可以知道 φ 爲一連續函數，現在定義一個新的函數 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 如下：

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n \varphi(4^n x)。$$

簡單可以驗證，若取 $f_n(x) = (3/4)^n \varphi(4^n x)$，則 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足**定理 5**，因此 $\{\sum f_n\}$ 均勻收斂，接著，我們再使用**推論 2**，可以知道，$f(x)$ 連續。

接下來，我們要證明此函數處處不可微，也就是在任何實數 x 都不可微，我們現在固定住這個 x，考慮任意一個正整數 m，我們取

$$\delta_m = \pm \frac{4^{-m}}{2}，$$

其中正負號定爲使 $4^m x$ 與 $4^m(x + \delta_m)$ 間沒有整數的，而這是可以被做到的，因爲 $|4^m \delta_m| = 1/2$。定義：

$$\gamma_n = \frac{\varphi(4^n(x + \delta_m)) - \varphi(4^n x)}{\delta_m}。$$

當 $n > m$ 時，$4^n \delta_m$ 爲一個正偶數，因此 $\gamma_n = 0$。而當 $0 \le n \le m$ 時，因爲 $|\varphi(s) - \varphi(t)| \le |s - t|$，所以 $|\gamma_n| \le 4^n$，且根據假設以及定義，有 $|\gamma_m| = 4^m$。此時，我們可以寫下：

$$\frac{f(x + \delta_m) - f(x)}{\delta_m} = \left| \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n \gamma_n \right| \ge (3^m - (\sum_{n=0}^{m-1} 3^n)) = \frac{3^m + 1}{2}。$$

如此即說明了，f 在每個點都不可微，也就完成了證明。 □

以上討論與定理參考了文獻 [1]。接下來，我們想要關心這樣的函數是否存在很多個，關於這部分的討論會出現在下面章節。

3 無處可微的函數形成一個稠密的 G_δ 集

這一節我們將著重於討論這樣函數的多寡，即是否可以描述出這樣函數所形成的集合，而下面是我們這節所要證明的定理。

定理 7. *設 C 爲所有定義在 $I=[0,1]$ 上的連續實函數集合，並定義此空間之範數 (度量) 爲 $\|\cdot\|_\infty=\|\cdot\|_{\sup}$，則 C 上無處可微的函數在此空間上構成一個稠密的 G_δ 集。*

這個定理甚至做爲一個習題出現在文獻 [2] 裡。而在討論這個定理前，我們應該先介紹此定理中所提及的 G_δ 集，以及稠密等概念。

定義 8. 設 E 爲度量空間 X 上的子集。我們稱 E 爲一個 G_δ 集，若存在可數個開集 $\{U_n\}_{n=1}^\infty$，滿足

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = E。$$

定義 9. 設 E 爲度量空間 (X,d) 上一子集，我們稱 E 是稠密的，若 $\overline{E}=X$。稱 E 是無處稠密的，若 $\operatorname{int}(\overline{E})=\varnothing$。

在了解稠密以及 G_δ 集的定義後，我們可以開始證明**定理 7**了，不過我們會先引入一些引理。令 X_n 爲 C 的一個子集，由一些滿足下列條件的函數 f 組成：

$$\text{存在}s\in I\text{，使得}|f(t)-f(s)|\le n|t-s|\text{，對所有}t\in I\text{皆成立。}$$

我們引入第一個引理。

引理 1. 對於所有的 $n\in\mathbb{N}$，X_n 爲 C 上的閉集。

證明. 首先，我們先回想以下事實：

> **定理 10.** *在一個度量空間 X 上，集合 E 爲 X 的非空子集，則 $p\in\overline{E}$ 若且唯若存在一個 E 上的點列收斂到 p。*

所以我們只要證明在 X_n 下收斂的函數序列 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 必定收斂到 X_n 上，現假設 $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 爲 X_n 上收斂到 f 的點列。由於 X_n 的定義，我們知道：對於每個 $k\in\mathbb{N}$，存在 $s_k\in[0,1]$，使得：

$$|f_k(t)-f_k(s_k)|\le n|t-s_k|\text{，對所有}t\in[0,1]\text{都成立。}$$

因 $\{s_k\}$ 爲一個 $[0,1]$ 上的數列，由於 $[0,1]$ 是緊緻的，因此我們可以找到一個子點列 $\{s_{\sigma(k)}\}$ 收斂到 s，注意到：$\{f_{\sigma(k)}(s_{\sigma(k)})\} \to f(s)$，因此我們有：

$$|f(t) - f(s)| = \lim_{k\to\infty} |f_{\sigma(k)}(t) - f_{\sigma(k)}(s_{\sigma(k)})| \le n \lim_{k\to\infty} |t - s_{\sigma(k)}| = n|t - s|\text{。}$$

因此，我們得到：$f \in X_n$，即完成證明。 □

接下來我們介紹下一個引理如下。

引理 2. 若 $f \in C$ 滿足：存在 $t \in [0,1]$，使得 $f'(t)$ 存在。則

$$f \in \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\text{。}$$

證明. 根據微分定義知道存在一個 $\delta > 0$，使得對於所有的 $|y - t| < \delta$，都會滿足：

$$|f(y) - f(t)| \le (|f'(t)| + 1)|y - t|\text{，}$$

此時，我們只要取正整數 $n \ge \max\{2\delta^{-1}\|f\|_{\sup}, |f'(t)| + 1\}$，即會發現 $f \in X_n$，即證明了此引理。 □

引理 3. 對於所有的 $f \in C$，$\epsilon > 0$ 及 $n \in \mathbb{N}$，存在一個 $g \in C$，滿足：

$$\|f - g\|_{\sup} < \epsilon \text{與} \begin{cases} |D^+g(x)| = \lim\limits_{h\to 0^+} \left|\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}\right| \ge n \\ |D^-g(x)| = \lim\limits_{h\to 0^-} \left|\dfrac{g(x+h) - g(x)}{h}\right| \ge n \end{cases}, \forall x \in [0,1]\text{。}$$

在證明這個引理時，我們需要先介紹**海涅定理**。

> **定理 11 (海涅定理).** *M_1, M_2 爲兩度量空間，若函數 (映射) $f : M_1 \to M_2$ 是一個連續函數且 M_1 是緊緻空間，則 f 是均勻連續函數。*

在敘述**海涅定理**後，我們便可以開始證明**引理 3**。

引理 3 的證明. 若某個 $f \in C$ 滿足：$|D^+f(x)| \ge n$ 與 $|D^-f(x)| \ge n$，對於所有的 $x \in [0,1]$ 成立，則我們寫 $f \in P_n$。現在考慮一個函數 $\phi(x)$，定義如下：

$$\phi(x) = \begin{cases} 2x & \text{，若} 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2 - 2x & \text{，若} \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}\text{，並定義 } \phi(x) = \phi(x+1)$$

最後，我們令 $\phi_n(x) = 2^{-n}\phi(4^n x)$，可以發現：$\phi_n(x) \in P_{2^n}$，且其滿足

$$\|\phi_n\|_{\sup} \le 2^{-n}\text{。}$$

現在考慮**引理 3**中的 f 是連續函數且 $[0,1]$ 是 $\mathbb{R}$ 上的緊緻集，因此 f 是均勻連續函數，故對於任意給定的 $\epsilon > 0$，都存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $|f(x) - f(y)| < \epsilon/2$，對所有

$|x-y| < 1/m$ 成立。令 $x_i = i/m$，其中 $i = 0,1,\dots,m$，並定義：

$$g_0(\lambda x_i + (1-\lambda)x_{i+1}) = \lambda f(x_i) + (1-\lambda) f(x_{i+1})，$$

其中 $i = 0,1,\dots,m-1$ 且 $0 \le \lambda \le 1$。我們可以發現 g_0 爲分段線性函數，因此爲連續函數，且 g_0 同時滿足 $\|f - g_0\|_{\sup} < \epsilon/2$。令

$$M = \max_{0\le i\le m-1}\{m|f(x_{i+1}) - f(x_i)|\}，$$

則有：

$$|D^+ g_0(x)| \le M \text{且} |D^- g_0(x)| \le M\text{，對於所有的} x \in [0,1] \text{成立。}$$

若我們取正整數 k 滿足：$2^k \ge M + n$ 且 $2^{-k} < \epsilon/2$，取 $g = g_0 + \phi_k$ 會滿足題目條件。 □

完成以上引理的討論，我們可以開始討論**定理 7**了。

定理 7 的證明. 根據**引理 3**，任何一個 $f \in X_n$，都可以找到一個 $g \notin X_n$，滿足 $\|f-g\| < \epsilon$，因此 X_n 沒有內點，又由**引理 1**知道 X_n 爲閉集，因此 X_n 爲無處稠密的閉集。我們把無處可微的函數集合記爲 $\mathcal{W}$，則由**引理 2**可以知道

$$\mathcal{W} = C\backslash(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(C\backslash X_n)，$$

由於 $C\backslash X_n$ 爲稠密的開集，所以 $\mathcal{W}$ 爲可數個稠密開集的交集，再根據貝爾範疇定理 (熟知 $(C, d_{\sup})$ 爲完備度量空間) 得知 $\mathcal{W}$ 爲 C 上的稠密子集，此定理即得證。 □

其中上面使用了貝爾範疇定理，其相關定義以及定理如下。

定義 12. 若一個度量空間 X，滿足：對於 X 上可數個稠密的開集 $\{U_n\}$，

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \text{爲一個稠密子集。}$$

則我們稱 X 是貝爾空間。

定理 13 (貝爾範疇定理). *一個完備的度量空間爲一個貝爾空間。換句話說，在一個完備的度量空間 X 上，給定可數個稠密的開集 $\{U_n\}$，則*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \text{爲一個稠密子集。}$$

本文中，關於**定理 10**、**定理 11**、**定理 13**等定理的證明以及討論是參考文獻 [3] 寫出，有興趣的讀者可以參考。

4 結論

綜合前面的討論，我們有以下結論：

1. 存在一個 $\mathbb{R}$ 上的實函數 f，連續但無處可微。
2. C 上無處可微的函數在此空間上構成一個稠密的 G_δ 集。

參考文獻

[1] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw - Hill Book C., 1986.

[2] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill Science/Engineering/Math, 1986.

[3] 程守慶. *數學：讀、想*. 華藝學術出版, 2020.